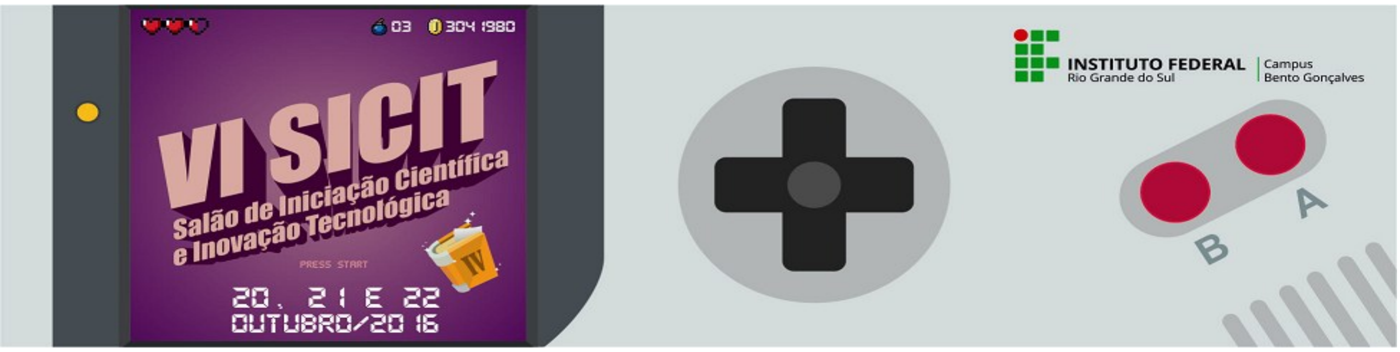

MODELO LOGÍSTICO: CRESCIMENTO POPULACIONAL DO HAITI

BOSI, D.[1]; GABRIEL, K. [1]; PILATTI, C.[1]; ROMIO, T. M.[1]; BAVARESCO, D. [2]; STROSCHEIN, S.D.[3]

RESUMO – Este trabalho apresenta resultados e discussões referentes a modelagem matemática da dinâmica populacional do Haiti entre os anos 2000 e 2015, usando o modelo denominado modelo logístico, na tentativa de avaliar os impactos demográficos da sequência de terremotos que devastou o país em 2010. A coleta dos dados foi feita através de pesquisa bibliográfica, nas publicações anuais "The World Factbook", e para o ajuste e geração dos gráficos utilizamos o *software* Scilab. A hipótese inicial era de que houvesse um decrescimento da população pelo aumento das taxas de mortalidade e emigração, diferentemente do que se verificou mediante análise dos dados obtidos. Em suma, foi possível aproximar satisfatoriamente o modelo logístico - com adaptações - aos dados de população do Haiti, permitindo novas análises e previsões para a população daquele país.

PALAVRAS-CHAVE: Modelagem Matemática; Equações Diferenciais; Dinâmica Populacional.

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho foi elaborado nas disciplinas de Modelagem Matemática e de Equações Diferenciais Ordinárias I do curso de Licenciatura em Matemática do campus Bento Gonçalves do IFRS, na tentativa de modelar o crescimento da população do Haiti entre os anos 2000 e 2015 e avaliar os impactos demográficos da sequência de terremotos que devastou o país em 2010.

No dia 12 de janeiro de 2010, um terremoto de magnitude 7,0 na escala Richter atingiu o Haiti, provocando um grande número de feridos, desabrigados e mortes. O terremoto ocorreu a cerca de 25 quilômetros de Porto Príncipe. Esse primeiro terremoto antecedeu outros dois de magnitudes 5,9 e 5,5. Esse fato promoveu grande destruição na região da capital haitiana, aproximadamente metade das construções foram destruídas, inclusive o palácio presidencial da capital Porto Príncipe. Estima-se que mais 300 mil pessoas foram mortas e cerca de 1,5 milhão

[1] Estudantes, Curso Licenciatura em Matemática, IFRS Campus Bento Gonçalves, Av. Osvaldo Aranha, 540, CEP 95.700-206, Bento Gonçalves, RS, cristiana.pilatti@bento.ifrs.edu.br; daniel.bosi@hotmail.com; kassianegabriel55@hotmail.com; tatiane.romio@bento.ifrs.edu.br.
[2] Prof. Doutor, IFRS Campus Bento Gonçalves, Av. Osvaldo Aranha, 540, CEP 95.700-206, Bento Gonçalves, RS, delair.bavaresco@bento.ifrs.edu.br.
[3] Prof. Mestre, IFRS Campus Bento Gonçalves, Av. Osvaldo Aranha, 540, CEP 95.700-206, Bento Gonçalves, RS, sandra.stroschein@bento.ifrs.edu.br.

de habitantes ficaram desabrigados. O terremoto foi avaliado como o pior nesta região nos últimos 200 anos.

2 METODOLOGIA

Os dados referentes ao quantitativo populacional de 2000 a 2015 (exceto 2010), foram obtidos em consulta às publicações “The World Factbook”, preparado pela *Central Intelligence Agency* (CIA) dos Estados Unidos. Quanto ao ano de 2010, em função da catástrofe, os dados não foram divulgados.

Após a resolução analítica da equação diferencial do modelo, a adequação a esse, com base na determinação dos parâmetros, foi realizada por meio de uma rotina computacional elaborada no *software Scilab*. Os principais parâmetros foram obtidos por meio do ajuste da curva logística aos dados citados, utilizando-se do método dos mínimos quadrados. Tal ajuste realizado para o modelo na forma de equação diferencial é proposto e descrito por Bassanezi (2012). A mesma rotina computacional permitiu a construção de gráficos e simulação para os parâmetros estimados, permitindo a análise da dinâmica populacional e projeções para os próximos anos.

3 MODELO LOGÍSTICO

Pierre-François Verhulst (1804-1849) propôs um modelo matemático para dinâmicas populacionais expresso por uma equação diferencial ordinária - EDO - de primeira ordem, não-linear, conhecida como equação logística (ZILL, 2011). Ele supõe que uma população, vivendo num determinado meio, deverá crescer até um valor limite ou a capacidade de suporte, isto é, ela tende a se estabilizar quando o tempo aumenta. Essa capacidade de suporte traduz, por exemplo, os recursos limitados do meio ambiente, epidemias e catástrofes. Tal modelo é descrito por

$$\frac{dP}{dt} = Pr\left(1-\frac{P}{K}\right) \tag{1}$$

em que, P - tamanho da população no instante t, r - taxa de reprodutividade máxima, K - valor limite da população ou capacidade de suporte do meio ambiente. As características fundamentais deste modelo consideram a diminuição da taxa de crescimento de uma população, de forma linear, à medida que a população cresce; a tendência de P é de estabilidade, isto é, $P(t) \rightarrow K$ quando $t \rightarrow \infty$; a solução geral para (1), obtida pelo método de separação de variável, é:

$$P(t) = \frac{rc_1}{\frac{r}{K}c_1 + e^{-rt}} \tag{2}$$

Usando a condição inicial *P(0)* = P_0 (população no instante t = 0), podemos determinar o valor da constante de integração $c_1 = \frac{P_0}{r - \frac{r}{K}P_0}$. Substituindo esse valor em (2) e simplificando, obtemos

$$P(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{P_0} - 1\right)e^{-rt}} \tag{3}$$

3.1 Modificações da Equação Logística

Há muitas variações da equação logística. Num dos casos as equações diferenciais

$$\frac{dP}{dt} = Pr\left(1 - \frac{P}{K}\right) - h \quad \text{e} \quad \frac{dP}{dt} = Pr\left(1 - \frac{P}{K}\right) + h \tag{4}$$

podem servir como modelo de populações humanas que diminuem em decorrência de emigração ou aumentam em decorrência de imigração, respectivamente. Se $h > 0$ for uma constante, as EDOs em (4) podem ser resolvidas analiticamente por separação de variáveis. A taxa *h* pode ser ainda uma função do tempo *t* ou dependente da população.

3.2 Determinação dos parâmetros

A Tabela 1 mostra as estimativas da população de 2000 a 2015, exceto 2010 (ano de ocorrência do terremoto):

Tabela 1 (Fonte: CIA) - População do Haiti de 2000 a 2015.

t (ano)	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
P(t)	6.867.995	6.964.549	7.063.722	7.527.817	7.656.166	8.121.622	8.308.504	8.706.497
t (ano)	2008	2009	-	2011	2012	2013	2014	2015
P(t)	8.924.553	9.035.536	-	9.719.932	9.801.664	9.893.934	9.996.731	10.110.019

Utilizando a rotina elaborada no *software Scilab*, realizou-se o ajuste quadrático para os dados coletados (Tabela 1) à equação (4), obtidos os parâmetros: $a = -0{,}00000008685$, $b = 1{,}4949214$ e $c = -6105099$. Temos, então,

$$\frac{dP}{dt} = -0{,}00000008685\,P^2 + 1{,}4949214\,P - 6105099 \tag{5}$$

Disso, uma estimativa dos parâmetros do modelo pôde ser feita:

$$b = r = 1{,}4949214 \quad \text{e} \quad a = -\frac{r}{K} = -0{,}00000008685 \Rightarrow K = 17212940$$

O gráfico da solução é mostrado na Figura 1. A Figura 2 mostra essa mesma curva no período de 2000 a 2020, mostrando a tendência do desenvolvimento populacional do país e permitindo fazer previsões para a população nesses anos.

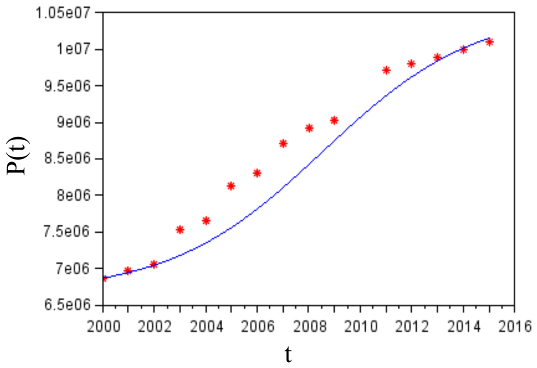

Figura 1: Gráfico da solução, P(t) em função de t.

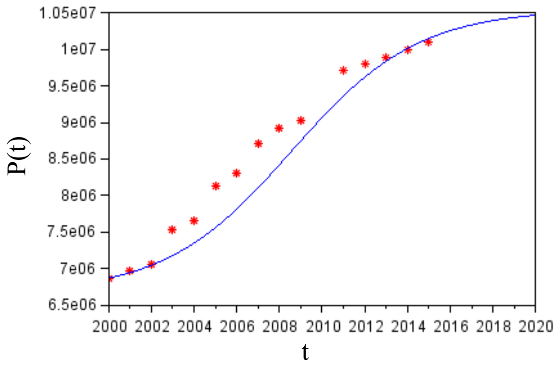

Figura 2: Previsões para a população em 2015 a 2020.

4 CONCLUSÕES

Apesar das mortes e emigração decorrentes do evento, a população continuou crescendo. Podemos perceber que as taxas de crescimento referentes aos anos após a catástrofe tiveram uma redução, que acredita-se ser causada pelo agravamento dos problemas socioeconômicos do país, já que, na realidade, as taxas não são dependentes apenas da população ou do tempo. Outras variáveis e dessas, algumas não-quantitativas, influem nesses números. Vale mencionar que, se comparados com os animais, os seres humanos, no que diz respeito à obtenção de alimentos, não dependem exclusivamente de recursos do meio, devido à circulação internacional de mercadorias que permite a importação.

O termo *h* da equação (4), que, em nosso modelo representa a emigração e é considerado constante, em situações reais, provavelmente é uma função. Ele altera o valor para o qual a solução tende, não mais sendo a capacidade de suporte.

Este estudo permitiu a aplicação de diferentes conceitos estudados nas disciplinas citadas e, desse modo, foi possível aproximar satisfatoriamente o modelo logístico - com adaptações - aos dados de população do Haiti, visto que utilizamos um método para a estimativa dos valores dos parâmetros do modelo. Além disso, o modelo permitiu fazer previsões para a população nos próximos anos. A hipótese inicial era de que houvesse um decrescimento, divergindo do ocorrido, pelo aumento das taxas de mortalidade e emigração, o que também não pudemos assegurar.

Alguns fatores não considerados durante o processo de Modelagem Matemática desse fenômeno podem ter influência significativa na dinâmica populacional estudada. Desse modo, abrem-se caminhos para novas investigações e aprofundamentos.

5 REFERÊNCIAS

BASSANEZI, Rodney C.. **Temas & Modelos**. Santo André: UFABC, 2012. Disponível em: <http://gradmat.ufabc.edu.br/livros/Temas%20&%20Modelos-%20o%20livro.pdf>. Acesso em: set. 2016.

CENTRAL INTELLIGENCE AGENCY. **The World Factbook 2000 - 2015**. Disponível em: <https://www.cia.gov/library/publications/download/>. Acesso em: maio 2016.

FRANCISCO, Wagner De Cerqueria E. O Terremoto no Haiti. **Brasil Escola**. Disponível em: <http://brasilescola.uol.com.br/geografia/o-terremoto-no-haiti.htm>. Acesso em: jul. 2016.

ZILL, Dennis G. **Equações diferenciais com aplicações em modelagem**. 2. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011.